Problemas San Gaku
o
Problemas Bonitos de Geometría
resueltos por
Métodos Elementales

Francisco Javier García Capitán

Priego de Córdoba, 2003

Índice

1. Introducción **1**

2. Las Herramientas **2**
- 2.1. La semejanza de triángulos 2
- 2.2. El teorema de Pitágoras 2
- 2.3. Tangencia de dos circunferencias 5
- 2.4. Un poco de práctica 6
- 2.5. Longitud de las tangentes comunes a dos circunferencias 8
- 2.6. Relación entre segmentos de tangentes 9
- 2.7. El número de oro 10
- 2.8. Radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo . . 12
- 2.9. Otras herramientas 13
  - 2.9.1. El teorema de Ptolomeo 13
  - 2.9.2. El teorema de Carnot 13
  - 2.9.3. El teorema de Casey 15
  - 2.9.4. El teorema de Descartes 16

3. Los Enunciados **17**

4. Las Soluciones **44**

5. Las Pistas **78**

6. Bibliografía y referencias **79**
- 6.1. Páginas web 79
- 6.2. Libros 79

1. Introducción

Se pretende que el título del presente trabajo cumpla dos misiones:

- Llamar tu la atención.
- Reflejar el contenido de las páginas que siguen.

Esperando que la primera de ellas ya esté conseguida, a partir de aquí comienza a desarrollarse las segunda: conseguir que los problemas y soluciones, así como las técnicas utilizadas te parezcan bonitos e interesantes.

Muchos de los problemas aquí presentados son problemas *sangaku*, es decir problemas que colgaban los japoneses bajo las terrazas de templos y santuarios durante la época de aislamiento que Japón tuvo de Occidente. Es común a casi todos los problemas *sangaku* precisamente el hecho de tratarse de problemas de enunciado sencillo y solución elemental. En algunos pocos casos, sin embargo, la solución del problema era bastante difícil y requería muchos cálculos.

Este trabajo comienza presentando una serie de *herramientas* útiles para resolver con éxito la mayoría de los problemas. Las herramientas básicas son el *teorema de Pitágoras* y la *semejanza de triángulos*, aunque también se proporcionan otras menos usuales como los teoremas de Casey y Descartes, entre otros, que serán necesarios para la resolución de algún problema concreto, pero que pueden obviarse en una primera lectura.

Preparamos con las herramientas, a continuación están los enunciados de los problemas a resolver. El lector puede echarles un vistazo en general e ir resolviendo los que les parezcan más fáciles, dejando los más difíciles para el final. Se avisa que el orden de los problemas no sigue ningún patrón determinado.

Las soluciones de los problemas se incluyen de forma separada a continuación de los enunciados de los problemas. De esta forma nos resulta fácil *no ver* la solución de un problema si no lo deseamos.

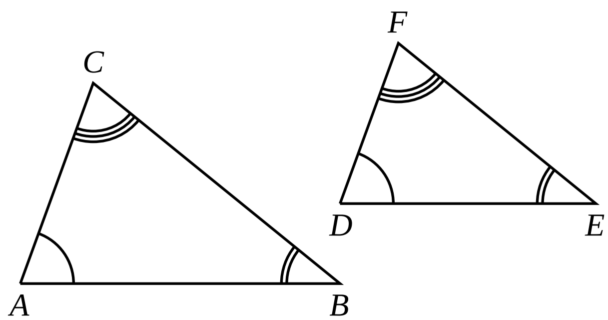
Al final, antes de la bibliografía, pueden encontrarse pistas de las soluciones, a las que nos podemos agarrar antes de mirar la solución completa.

2. Las Herramientas

Antes de comenzar a resolver los problemas debemos hacer recuento de las herramientas de que disponemos para lograr nuestro objetivo con éxito. Procuraremos llevar a cuestas unas armas ligeras: por ejemplo, nada cálculo diferencial y lo mínimo de geometría analítica o trigonometría. Sin embargo, para dar respuesta a algún problema famoso o curioso usaremos algunos resultados poco conocidos, como el teorema de Descartes o el teorema de Casey, entre otros. Estos teoremas se describen con detalle en la sección 2.9

2.1. La semejanza de triángulos

Decimos que dos triángulos son *semejantes* cuando tienen iguales los tres ángulos y proporcionales los tres lados.



Hay tres situaciones que nos permiten afirmar que dos triángulos son semejantes:

1. Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes.
2. Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales, e iguales los ángulos comprendidos, entonces son semejantes.
3. Si dos triángulos tienen tres lados proporcionales, entonces son semejantes.

Como aplicación de la semejanza de triángulos obtendremos en el apartado siguiente una demostración del teorema de Pitágoras.

2.2. El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras afirma que si a e b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa, entonces se cumple la relación

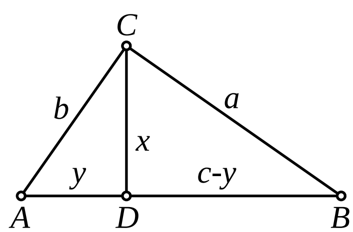
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

El recíproco también es cierto, es decir, si se cumple esta relación en un triángulo, entonces el triángulo es rectángulo.

El teorema de Pitágoras aparece como la Proposición 47 del primer Libro de los Elementos de Euclides. El recíproco del teorema de Pitágoras es la Proposición 48 y última de dicho libro.

La siguiente demostración, atribuida a Lagrange, es de las más simples entre las que usan la semejanza de triángulos.

Consideremos el triángulo ABC, rectángulo en C. Al trazar la perpendicular CD a AB resultan tres triángulos semejantes ACB, ADC y CDB. Por ejemplo ADC y ACB comparten el ángulo A y además ambos tienen un ángulo recto. Por tanto tienen dos ángulos iguales.



Por ser ADC semejante a ACB,

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow yc = b^2.$$

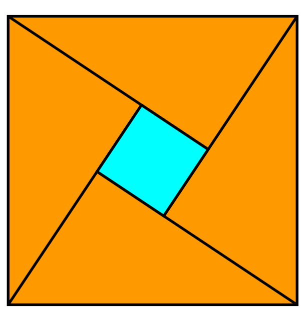
Por ser CDB semejante a ACB,

$$\frac{c-y}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow (c-y)c = a^2.$$

Entonces,

$$a^2 = (c-y)c = c^2 - yc = c^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

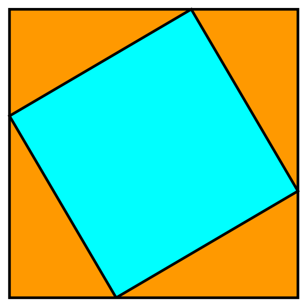
De las demostraciones del teorema de Pitágoras basadas en la disección, consideraremos aquí la basada en la siguiente figura:



Aquí, si a y b son los catetos menor y mayor, respectivamente, el cuadrado central mide $a - b$, y entonces, sumando áreas tenemos:

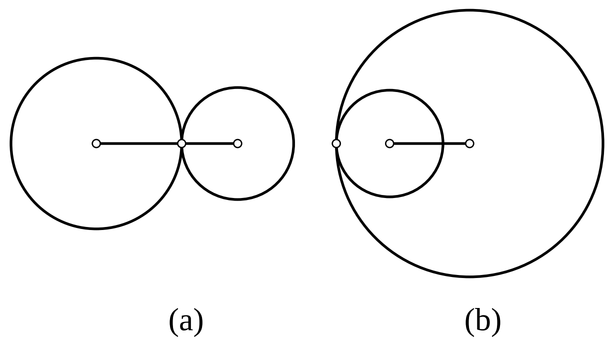
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Ejercicio. ¿Querría el lector encontrar la justificación a otra demostración similar del teorema de Pitágoras, basada en la siguiente figura?



2.3. Tangencia de dos circunferencias

En los problemas en los que intervengan circunferencias tangentes tendremos en cuenta que:

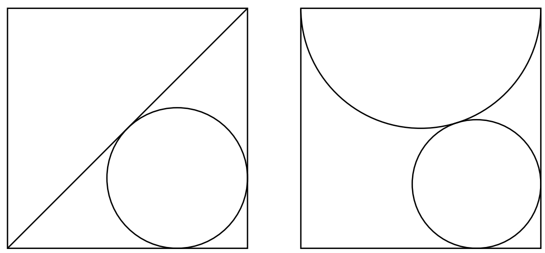


a) Si dos circunferencias son tangentes exteriores, entonces la distancia entre sus centros es la suma de los radios.

b) Si dos circunferencias son tangentes interiores, entonces la distancia entre sus centros es la diferencia de los radios.

2.4. Un poco de práctica

Teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras y las condiciones de tangencia de dos circunferencias que acabamos de ver podemos resolver algunos problemas sencillos como los siguientes, tomados de la página web de Matias Giovanni: en ambos casos se pide el radio de del círculo inscrito, en función del lado del cuadrado.



(a) (b)

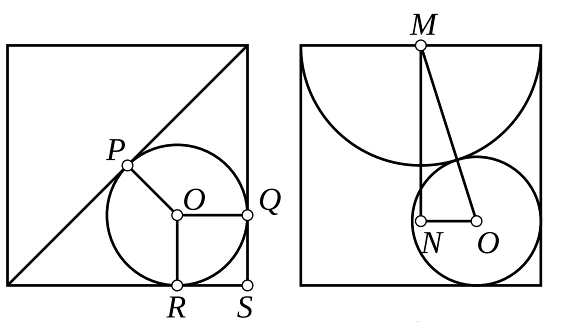
Llamemos a al lado del cuadrado y r al radio buscado.

En el caso (a), tendremos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = SP = SO + OP = \sqrt{2}r + r = \left(1+\sqrt{2}\right)r.$$

Por tanto,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a.$$



(a) (b)

En el caso (b), aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo MNO:

$$\begin{aligned}
&MN^2 + NO^2 = MO^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a-r)^2 + \left(\tfrac{a}{2}-r\right)^2 = \left(\tfrac{a}{2}+r\right)^2 \\
&\Rightarrow (a-r)^2 = \left(\tfrac{a}{2}+r\right)^2 - \left(\tfrac{a}{2}-r\right)^2 = 2ar \\
&\Rightarrow a^2 - 2ar + r^2 = 2ar \Rightarrow r^2 - 4ar + a^2 = 0,
\end{aligned}$$

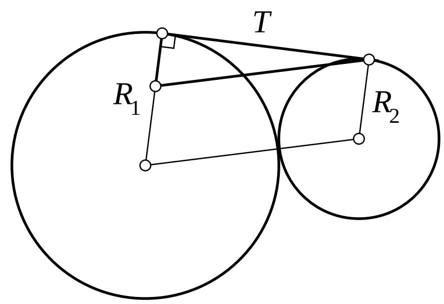
de donde deducimos que

$$r = \left(2 - \sqrt{3}\right) a.$$

2.5. Longitud de las tangentes comunes a dos circunferencias

A continuación se dan fórmulas de tangentes comunes a dos circunferencias.

1. Supongamos que dos circunferencias, con radios R_1 y R_2 son tangentes exteriores. Entonces la longitud T del segmento de tangente exterior común vale $2\sqrt{R_1R_2}$.



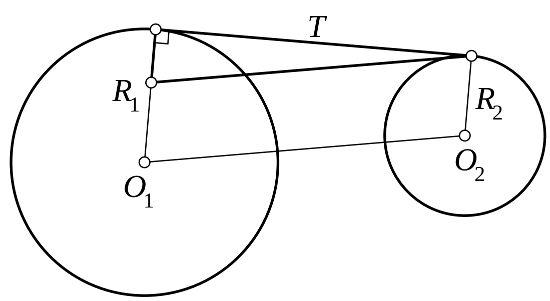
   En efecto, usando el teorema de Pitágoras,

$$T^2 + (R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2 \Rightarrow T^2 = 4R_1R_2.$$

2. Si dos circunferencias, con centros O_1 y O_2, y radios R_1 y R_2, son exteriores, la longitud T del segmento de tangente exterior común T verifica:

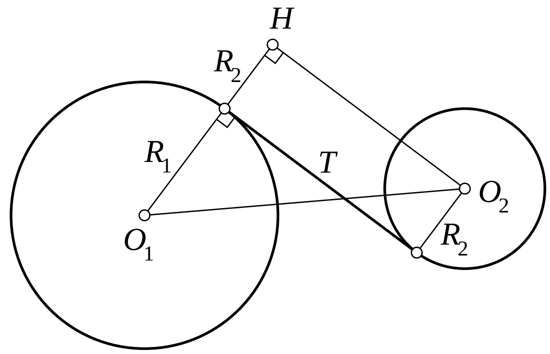
$$T^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (R_1 - R_2)^2.$$

   En efecto, basta usar de nuevo el teorema de Pitágoras:



3. Si dos circunferencias, con centros O_1 y O_2, y radios R_1 y R_2, son exteriores, la longitud T del segmento de tangente interior común verifica:

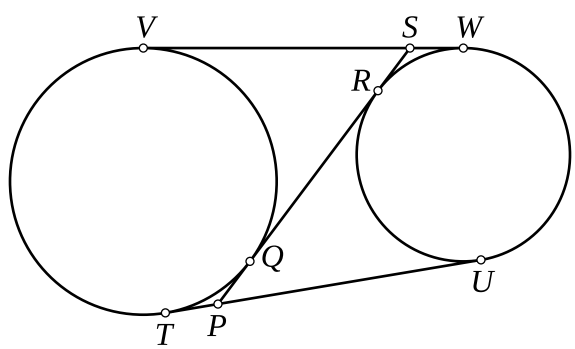
$$T^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (R_1 + R_2)^2.$$



En este caso, trazamos una paralela O_2H a la tangente común. Entonces, bastará usar el teorema de Pitágoras con el triángulo O_1HO_2, rectángulo en H.

2.6. Relación entre segmentos de tangentes

Los dos segmentos de tangente a una circunferencia desde un punto exterior son iguales. También son iguales los dos segmentos de tangente exterior común a dos circunferencias. Por último, también son iguales los dos segmentos de tangente interior común a dos circunferencias.



Aplicando esto, podemos encontrar alguna relación útil entre segmentos de tangentes a dos circunferencias. Por ejemplo, en la figura anterior, comprobemos que $TU = PS$. En primer lugar, $SR = PQ$. En efecto,

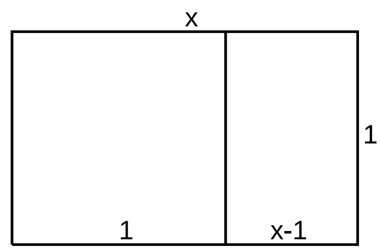
$$\begin{aligned} VW =& TU \\ VS + SW =& TP + PU \\ SQ + SR =& PQ + PR \\ 2SR + QR =& 2PQ + QR \\ SR =& PQ \end{aligned}$$

Ahora,

$$TU = TP + PU = PQ + PR = SR + PR = PS.$$

2.7. El número de oro

El número de oro aparece en muchas figuras geométricas. Por ejemplo, cuando consideramos un rectángulo con unas dimensiones tales que al suprimir un cuadrado máximo resulta otro rectángulo semejante.



En la figura, el rectángulo tiene por altura la unidad y por base una cantidad x. Suponiendo que se cumple la propiedad anterior, tenemos

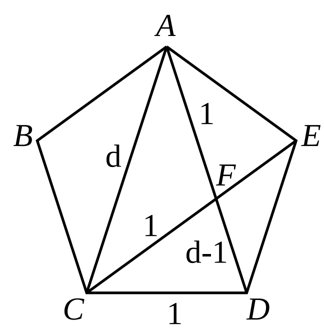
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

El valor obtenido de x se conoce como número de oro y se representa por Φ.

El número de oro está muy presente en el pentágono regular. En la figura de la página siguiente, los triángulos ACD y CDF son semejantes, por lo que

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

es decir, la relación entre una diagonal y el lado de un pentágono regular es el número de oro.



Teniendo en cuenta esto, podemos obtener el valor exacto de algunas razones trigonométricas:

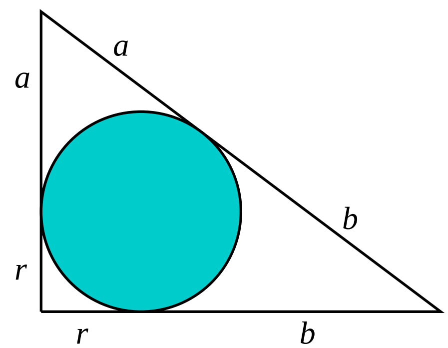
$$\cos 72 = \frac{\frac{1}{2}CD}{CA} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Usando las fórmulas del ángulo mitad,

$$\begin{aligned}\cos 36 =&\sqrt{\frac{1+\cos 72}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \\ =&\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

2.8. Radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo con catetos x e y, y con hipotenusa z. Según se muestra en la figura, podemos expresar $x = a+r$, $y = b+r$, $z = a+b$.



Entonces, $z = a + b = x - r + y - r$. De aquí, resulta

$$z = a + b = (x + r) + (y - r) = x + y - 2r.$$

Despejando obtenemos

$$r = \frac{x + y - z}{2}.$$

Como aplicación, el lector puede resolver el siguiente

Ejercicio. Si un triángulo rectángulo tiene lados enteros, entonces el radio de la circunferencia inscrita al triángulo también será entero.

2.9. Otras herramientas

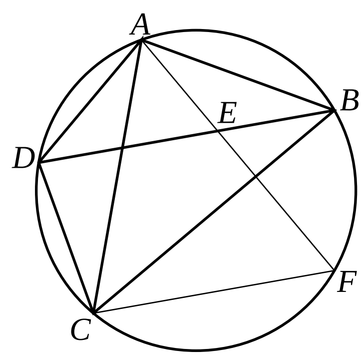
En esta sección vemos ciertos resultados que son necesarios para resolver algunos de los enunciados, si bien la mayoría pueden resolverse usando técnicas más elementales como el teorema de Pitágoras o la semejanza de triángulos.

2.9.1. El teorema de Ptolomeo

El teorema de Ptolomeo dice que en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:

$$AB \cdot DC + DA \cdot CB = AC \cdot BD.$$

Sea el cuadrilátero $ABCD$. Tracemos el segmento AF de manera que $\angle BAF = \angle CAD$.



Entonces, los triángulos ABE y ACD son semejantes y

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot BE \tag{1}$$

También son semejantes los triángulos ADE y ACB:

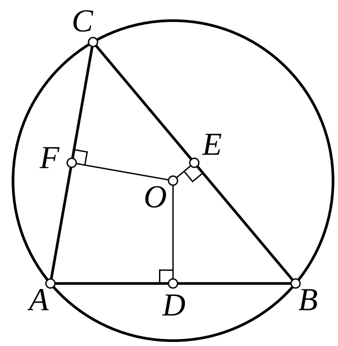
$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow DA \cdot CB = AC \cdot ED \tag{2}$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) obtenemos

$$AB \cdot DC + DA \cdot CB = AC(BE + ED) = AC \cdot BD.$$

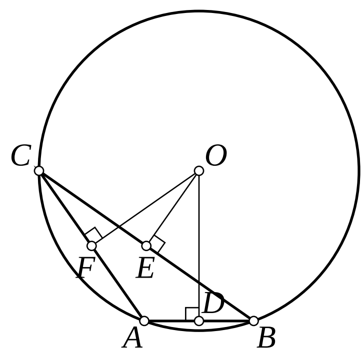
2.9.2. El teorema de Carnot

Dado cualquier triángulo ABC, la suma de las distancias con signo desde el circuncentro O a los lados es $R+r$, siendo R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo ABC.



El signo de la distancia se considera positivo si y solo si el segmento entero dentro está dentro del triángulo.

Así, en el triángulo de la figura siguiente una de las distancias es negativa.



Antes de abordar la demostración del teorema de Carnot, conviene recordar que

1. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad que éste.

2. El área de un triángulo puede expresarse en la forma sr, siendo s el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

3. Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si y solo si los ángulos opuestos son suplementarios.

Ahora, en el caso del triángulo acutángulo, sean $x = OD$, $y = OE$, $z = OF$ y, como es habitual, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. El cuadrilátero $OBDE$ está inscrito en una circunferencia, por lo que podemos aplicar el teorema de Ptolomeo: $\frac{a}{2}x+\frac{c}{2}y = \frac{b}{2}R$, o $ax+cy = bR$. De forma similar, usando los cuadriláteros $OECF$ y $OFAD$, obtendremos que $by + az = cR$ y que $bx + cz = aR$. Además, expresando la suma de las áreas de los triángulos OAB, OBC y OCA e igualándolas al área del triángulo ABC obtenemos

$$cx + ay + bz = 2(ABC) = (a + b + c)r.$$

Sumando a esta igualdad las tres anteriores obtenemos

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a+b+c)R + (a+b+c)r,$$

es decir, $OD + OE + OF = R + r$.

En el caso de un triángulo obtusángulo, aplicando también el teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros $OEDB$, $OFAD$ y $OCFE$ obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} cy + bR &= ax, \\ bx + cz &= aR, \\ cR + by &= az. \end{aligned}$$

Por otro lado, la igualdad $(OAB) + (OAC) - (OBC) = (ABC)$ se expresa $cx + bz - ay = (a+b+c)r$. Sumando las cuatro igualdades obtenemos

$$(a+b+c)(x-y+z) = (a+b+c)(R+r),$$

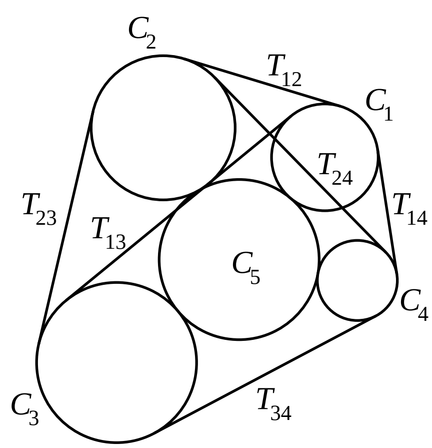
es decir, $OD - OE + OF = R + r$.

2.9.3. El teorema de Casey

El teorema de Casey (John Casey, 1820-1891) es una generalización del teorema de Ptolomeo y expresa una condición necesaria y suficiente para que cuatro circunferencias sean tangentes a una quinta circunferencia.

Aquí solo consideraremos el caso de cuatro circunferencias C_1, C_2, C_3, C_4 tangentes exteriores a una quinta circunferencia en ese orden. Entonces, si llamamos T_{ij} a la longitud de la tangente exterior común a a C_i y C_j, se cumple la relación

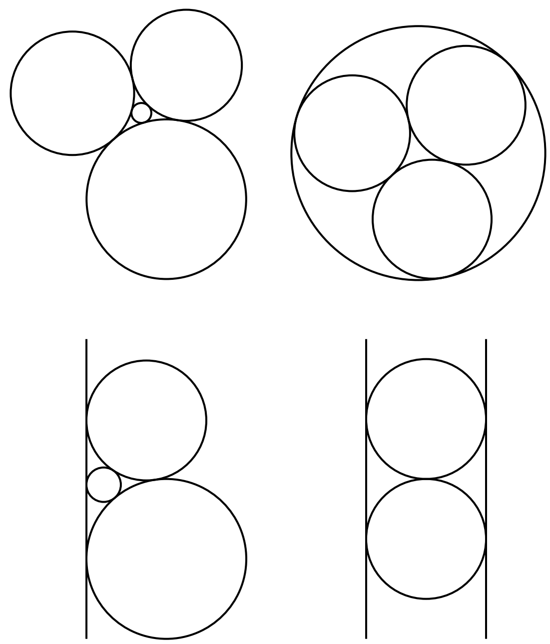
$$T_{12}T_{34} + T_{14}T_{23} = T_{13}T_{24}.$$



Si las cuatro circunferencias degeneran en puntos A, B, C, D, obtenemos el teorema de Ptolomeo.

2.9.4. El teorema de Descartes

En una carta de Noviembre de 1643 a la princesa Isabel de Bohemia, Descartes desarrolló una fórmula para los radios de cuatro círculos mutuamente tangentes.



El teorema de Descartes se expresa de forma sencilla usando el concepto de *curvatura* de un círculo. En principio, definimos la curvatura de un círculo como el inverso de su radio:

$$\varepsilon = \frac{1}{r}.$$

En el caso de cuatro círculos mutuamente tangentes, si todos los contactos son externos, entonces convendremos en que todas las curvaturas son positivas, pero si un círculo encierra a los demás, entonces a éste le asignaremos curvatura negativa.

Llamando entonces, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, a las curvaturas de cuatro círculos mutuamente tangentes, el teorema de Descartes afirma que se cumple la relación

$$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2.$$

Descartes hablaba en su carta sólo de la situación mostrada en la primera de las figuras de la página anterior, pero es válido para también para las otras tres. Cuando intervienen rectas, consideramos que éstas tienen radio infinito y curvatura cero.

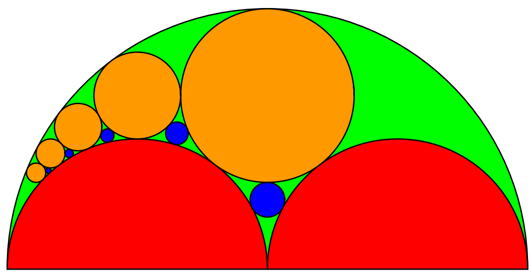
Para una demostración del teorema de Descartes puede verse el libro de Coxeter.

3. Los Enunciados

Problema 1.

Círculos inscritos encadenados

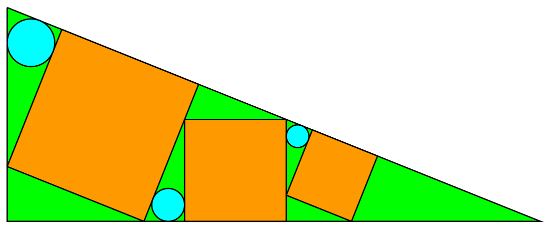
(Tokyo, 1788) ¿Cuál es el radio del enésimo círculo azul, en términos de r, el radio del círculo grande verde? Observa que los dos círculos rojos son iguales, ambos con radio $\frac{r}{2}$.



Problema 2.

Tres círculos y tres cuadrados inscritos en un triángulo rectángulo

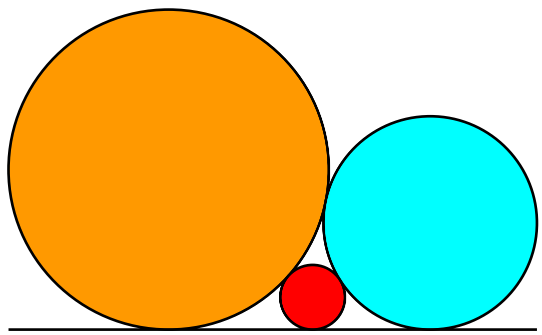
(Miyagi, 1913) Tres cuadrados naranjas están dibujados como se muestra dentro del triángulo grande verde. ¿Cómo están relacionados los radios de los tres círculos azules?



Problema 3.

Circunferencia tangente a dos circunferencias y una recta

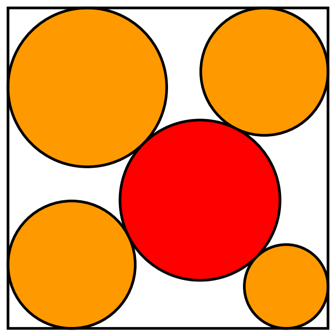
(Gumma, 1824) El círculo naranja y el azul se tocan el uno al otro en un punto y son tangentes a la misma recta. El círculo rojo pequeño toca tanto a los círculos grandes como a la misma recta. ¿Cómo están relacionados los radios de los tres círculos?



Problema 4.

Cuatro círculos tangentes a un cuadrado y a un círculo

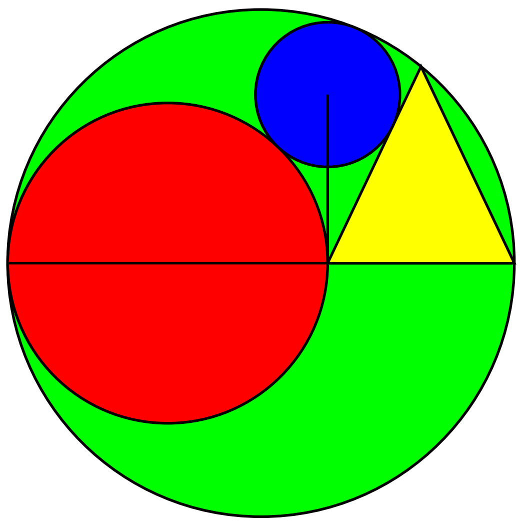
(Gumma, 1874) En el interior de un cuadrado hay un círculo. Cuatro círculos todos con radio diferente, tocan a éste círculo central y a lados contiguos del cuadrado. ¿Qué relación hay entre los radios de los cuatro círculos y el lado del cuadrado?



Problema 5.

Un círculo que contiene a dos círculos, un triángulo isósceles y una perpendicular

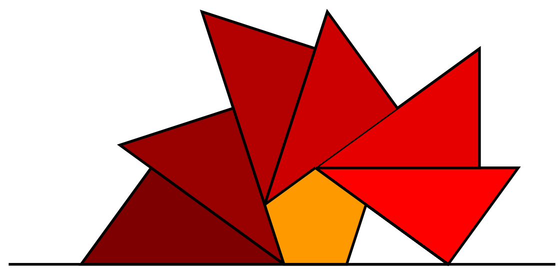
(Gumma, 1803) La base de un triángulo isósceles está sobre un diámetro del círculo grande verde. Este diámetro también biseca al círculo rojo, que está inscrito en él, tocando un vértice del triángulo, como se muestra. Un segmento une el centro del círculo azul y el punto de contacto del círculo rojo y el triángulo. Demostrar que este segmento es perpendicular al diámetro dibujado del círculo verde.



Problema 6.

El pentágono y su abanico

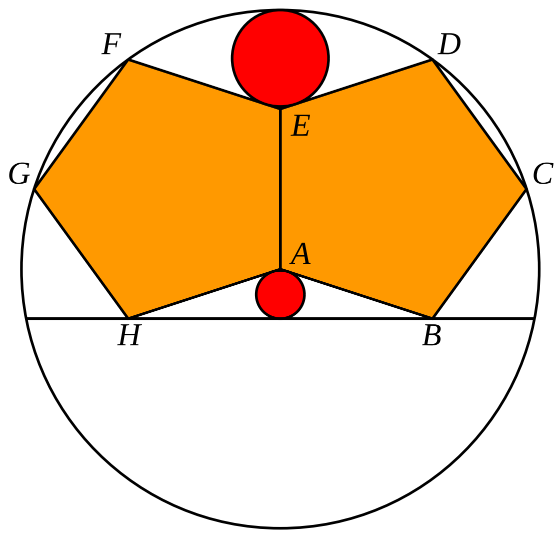
La siguiente figura muestra un pentágono regular con lados de longitud k, con seis triángulos rectángulos iguales rodeándolo en forma de abanico. Encontrar la longitud de la hipotenusa de los triángulos.



Problema 7.

Los dos pentágonos

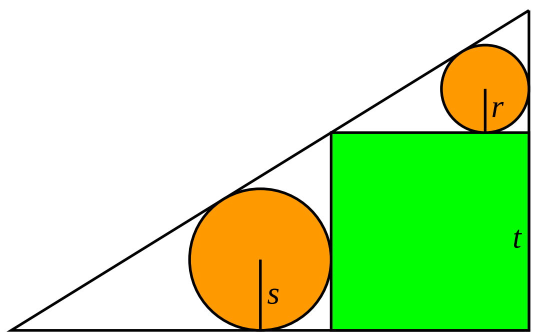
Dos pentágonos iguales con un lado común se inscriben en un gran círculo, como se muestra en la figura. Un círculo de radio r toca el círculo grande y los lados DE y EF de los pentágonos, y el círculo inscrito en el triángulo ABH tiene radio t. Demostrar que $r = 2t$. (*No hay que hacer cálculos complicados: intentar inscribir el círculo de radio r en un triángulo.)*



Problema 8.

Dos círculos y un cuadrado inscritos en un triángulo rectángulo

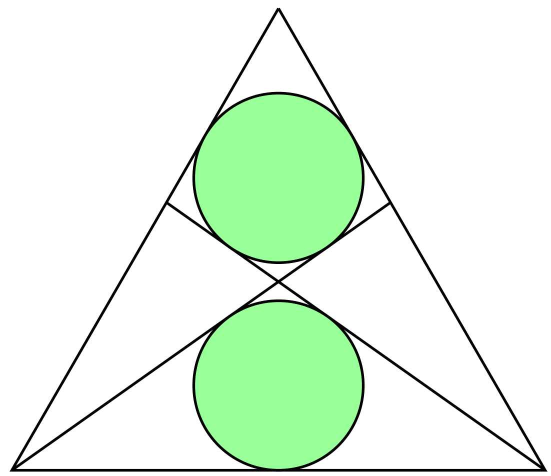
Un cuadrado está inscrito en un triángulo rectángulo y los círculos inscritos en los dos triángulos pequeños tienen radios r y s. Hallar el lado t del cuadrado en función de r y s.



Problema 9.

Dos círculos gemelos en un triángulo equilátero

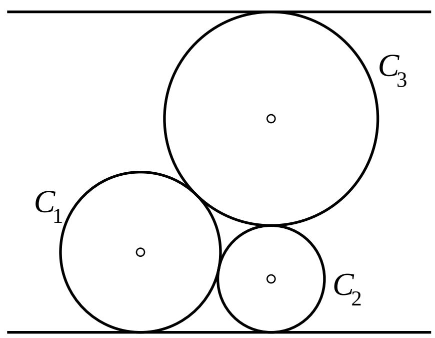
Si el triángulo es equilátero, y los dos círculos tienen el mismo radio, ¿cuál es éste?



Problema 10.

Tres círculos entre dos paralelas

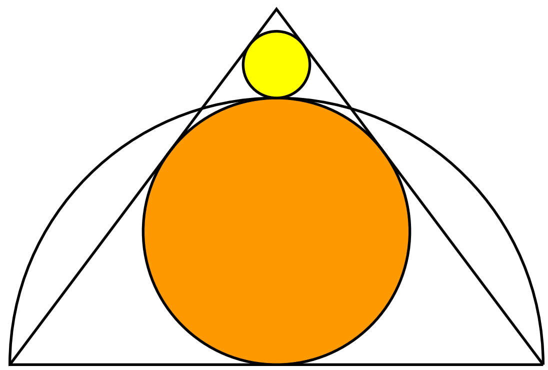
Encontrar la distancia entre las dos paralelas en función de los radios de los círculos.



Problema 11.

Un semicírculo con un círculo dentro y otro fuera

Encontrar los radios de los círculos inscritos en términos del semicírculo de radio r.

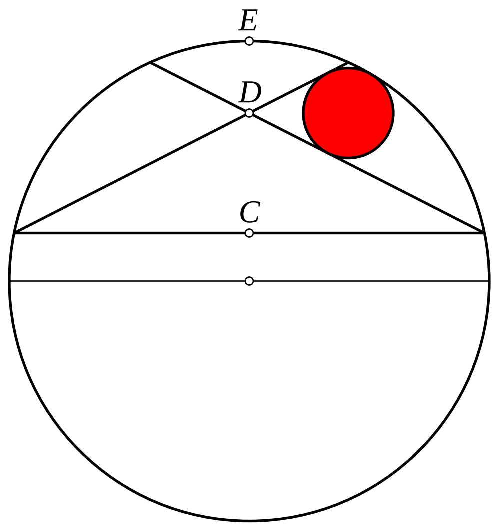


Problema 12.

Círculo inscrito entre dos cuerdas

Demostrar, que si r es el radio del círculo inscrito entre las dos cuerdas, entonces

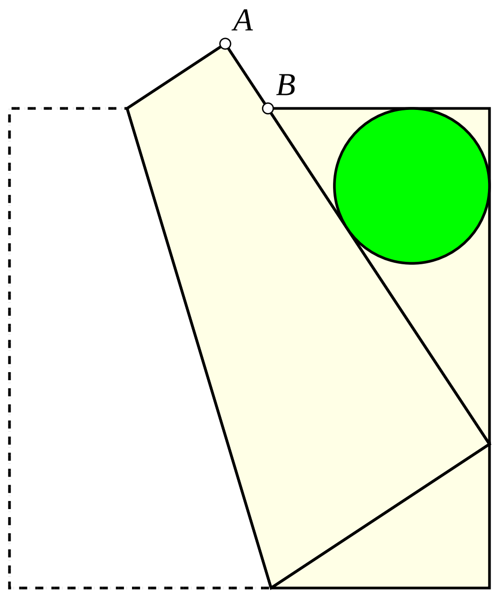
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{DE}.$$



Problema 13.

La moneda y la servilleta doblada

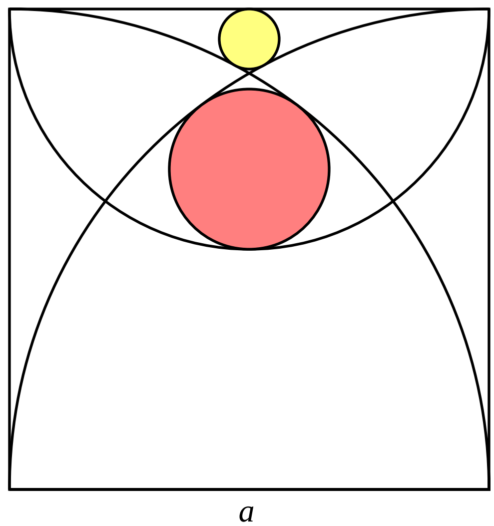
Demostrar que, en el cuadrado doblado de la figura, el radio del círculo es igual a la longitud AB.



Problema 14.

El ángel con la hogaza

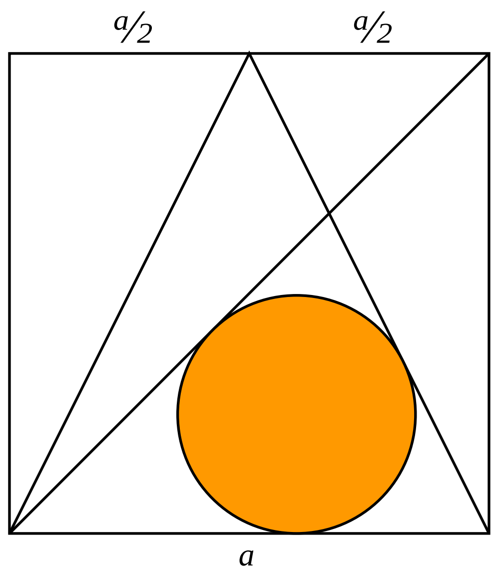
Hallar los radios de los dos círculos interiores.



Problema 15.

Un círculo entre dos triángulos isósceles

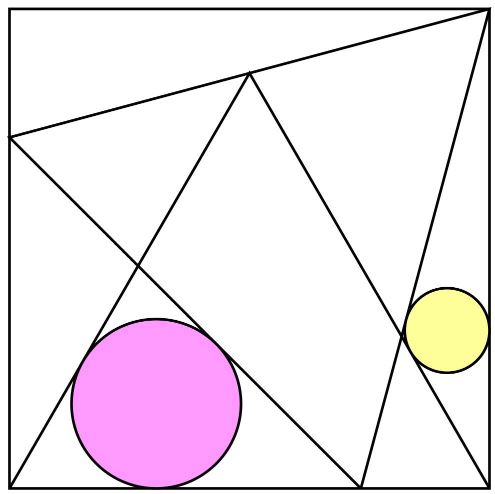
Hallar el radio del círculo en función de a.



Problema 16.

Dos círculos inscritos entre un cuadrado y dos triángulos equiláteros

Siendo equiláteros los dos triángulos que hay dentro del cuadrado, ¿qué relación hay entre los dos radios?

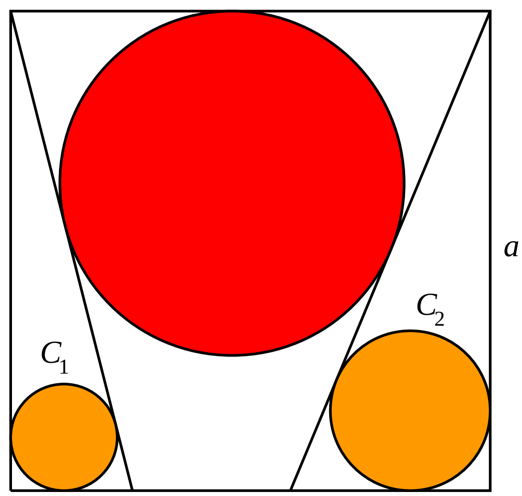


Problema 17.

Un círculo entre dos tangentes a círculos inscritos en triángulos rectángulos dentro de un cuadrado.

Demostrar que el radio r del círculo central cumple la relación

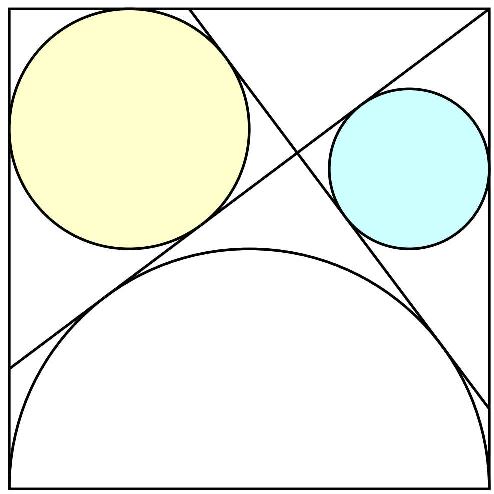
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a - 2r_1} + \frac{1}{a - 2r_2}.$$



Problema 18.

Un cuadrado, un semicírculo y dos círculos

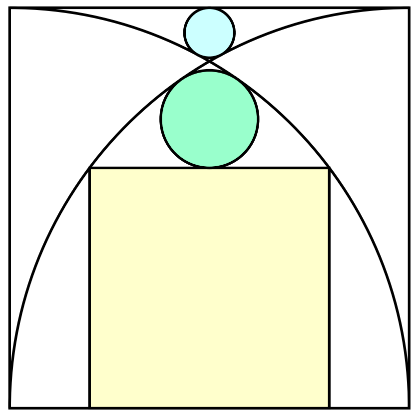
Demostrar que la relación entre los radios de los dos círculos es 3:2.



Problema 19.

Círculos entre arcos y cuadrados

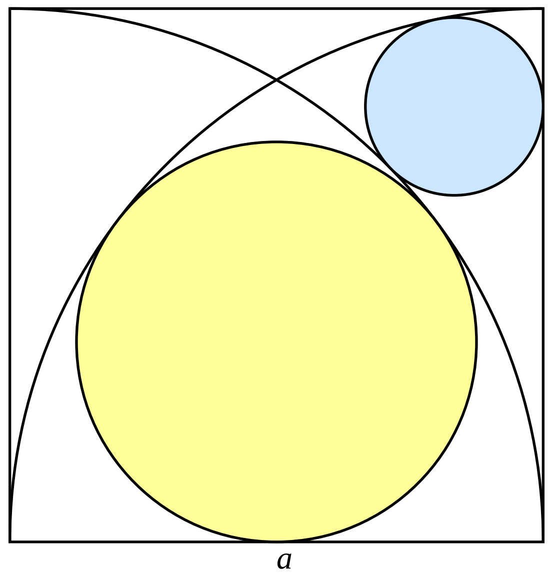
Encontrar el radio del cuadrado interior y de los círculos interiores.



Problema 20.

Dos círculos y dos arcos dentro de un cuadrado

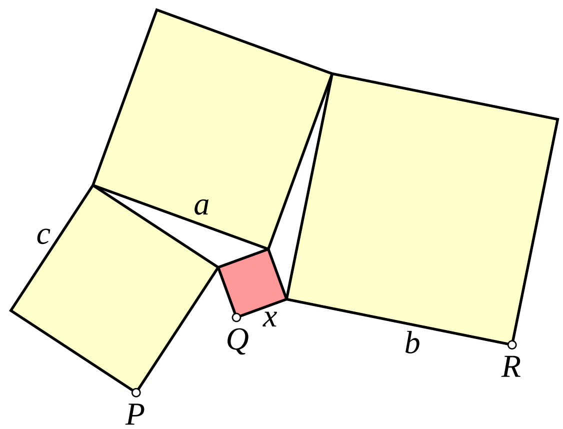
Hallar el radio de los círculos interiores.



Problema 21.

Cóctel de cuadrados

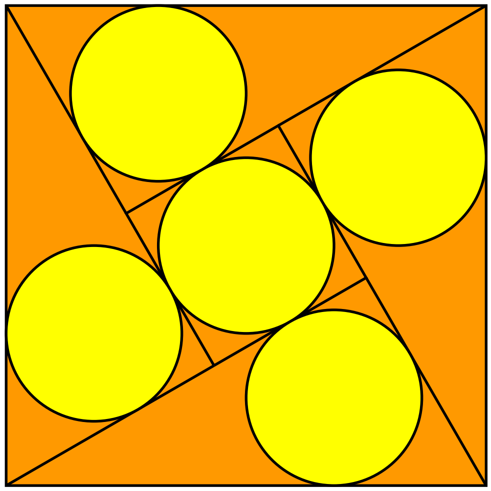
¿Qué relación debe haber entre a y x para que los puntos P, Q y R estén alineados? Expresar, en cualquier caso, x en términos de a, b y c.



Problema 22.

Cinco círculos gemelos en un cuadrado

Hallar el radio de estos cinco círculos en función del lado del cuadrado.



Problema 23.

Cuatro círculos grandes y dos pequeños

Consideremos esta imagen de una tableta japonesa.

En caso de no saber japonés, podemos considerar dos enunciados del problema:

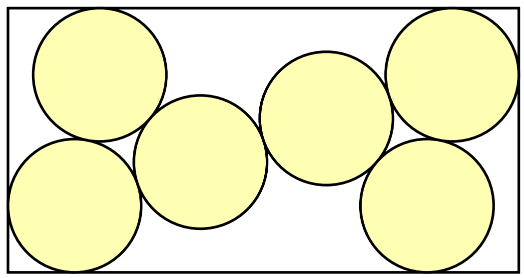
1. Si los cuatro círculos oscuros tienen el mismo radio r y los círculos claros tienen radio s, hallar r y s en términos del radio a del círculo circunscrito.

2. Si de los cuatro círculos oscuros el superior y el inferior tienen un radio r y el izquierdo y el derecho tienen un radio R y, como antes s es el radio de los círculos claros, expresar R y s en términos de r y a.

Problema 24.

Seis círculos en un rectángulo

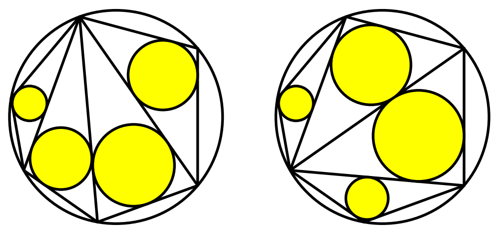
Encontrar las dimensiones del siguiente rectángulo, siendo la unidad el diámetro de los seis círculos.



Problema 25.

Primer teorema de Mikami y Kobayashi

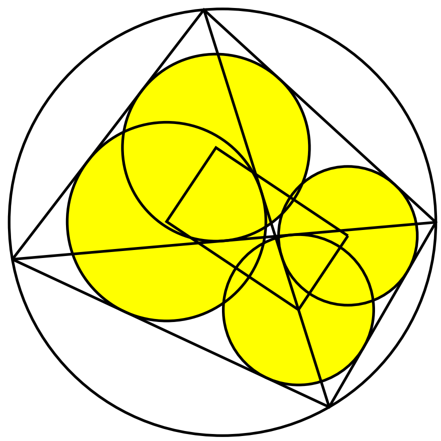
Al triangular un polígono convexo inscrito en un círculo, trazando todas las diagonales desde uno de los vértices, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos es una constante que es independiente del vértice usado para hacer la triangulación.



Problema 26.

Segundo teorema de Mikami y Kobayashi

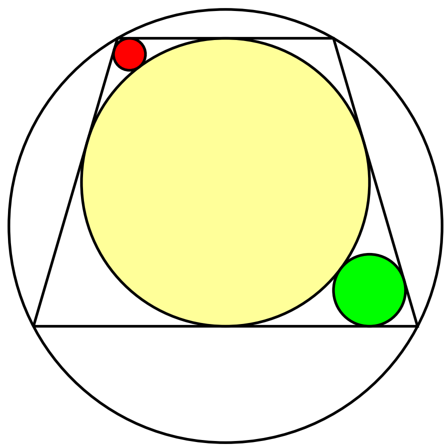
Demostrar que al unir los incentros de los triángulos formados al trazar las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se forma un rectángulo.



Problema 27.

Un cuadrilátero inscrito y circunscrito, y dos círculos más

El cuadrilátero está inscrito y circunscrito, como indica la figura. El diámetro del círculo verde es 9 y el del rojo es 4. ¿Cuál es el diámetro del círculo amarillo?



4. Las Soluciones

Problema 1.

Círculos inscritos encadenados

Vamos a usar el teorema de los círculos de Descartes:

$$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2.$$

Para simplificar, consideramos que $r = 1$. Entonces, aplicando la fórmula con $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 2$, obtenemos $\varepsilon_4 = 3$, así que el primer círculo naranja tiene radio $\frac{1}{3}$.

Para $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 3$ obtenemos $\varepsilon_4 = 6$ siendo $\frac{1}{6}$ el radio del segundo círculo naranja. Continuando el proceso vemos que los círculos naranja tienen radios $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{18}$, ... Por inducción puede comprobarse el radio del círculo naranja n es $1/(n^2 + 2)$.

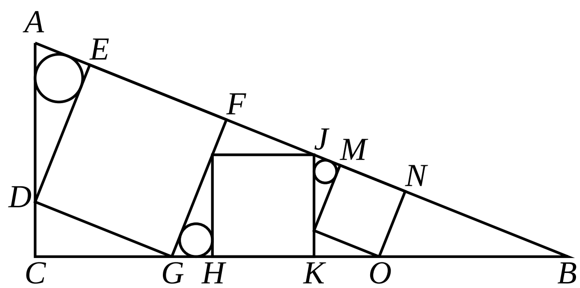
Ahora aplicamos otra vez el teorema de Descartes con $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = n^2 + 2$, $\varepsilon_3 = (n-1)^2 + 2$ y obtenemos $\varepsilon_4 = 4n^2 - 4n + 15$, es decir el radio del círculo azul n es

$$\rho_n = \frac{1}{4n^2 - 4n + 15}.$$

Problema 2.

Tres círculos y tres cuadrados inscritos en un triángulo rectángulo

Nombremos los vértices de la figura así:



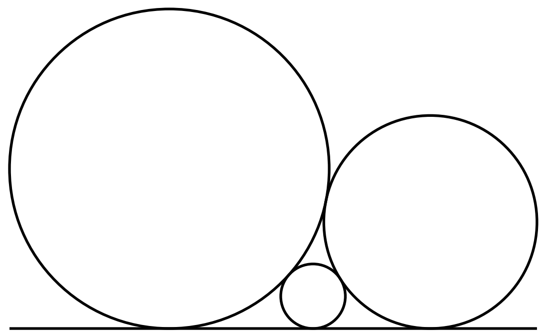
Sean $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ los lados del triángulo ABC. El triángulo DGC es semejante a ABC, por lo que los lados homólogos se escribirán ka, kb y kc para algún $k < 1$. El triángulo GBF es semejante a ABC. Como $GF : AC = \frac{kc}{b}$, esa es la razón de los radios de los círculos inscritos en AED y GHI y la misma va a ser entre los radios de los círculos inscritos en GHI y JML.

Por tanto, si llamamos r_1 al radio del círculo mayor, r_2 al del mediano y r_3 al del menor, hemos visto que r_1, r_2,r_3 es una progresión geométrica de razón $\frac{kc}{b}$.

Entonces, $\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1}$, o bien $r_2^2 = r_1 r_3$.

Problema 3.

Circunferencia tangente a dos circunferencias y una recta



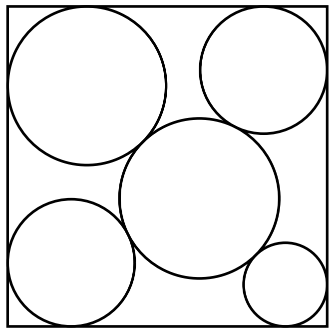
Usaremos que el segmento de tangente común a dos circunferencias tangentes exteriores de radios R_1 y R_2 es $2\sqrt{R_1R_2}$ (ver pág. 8).

Llamando R_1, R_2, R_3 a los radios de las circunferencias mayor, mediana y menor tenemos entonces que

$$\begin{aligned} &2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{R_1R_3} + 2\sqrt{R_2R_3} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}. \end{aligned}$$

Problema 4.

Cuatro círculos tangentes a un cuadrado y a un círculo



Llamamos C_1, C_2, C_3 y C_4 a los cuatro círculos, O_1, O_2, O_3 y O_4 a sus centros y r_1, r_2, r_3 y r_4 a sus radios. Sea a el lado del cuadrado. Aplicamos el teorema de Casey. Se cumple que $T_{12}T_{34} + T_{14}T_{23} = T_{13}T_{24}$, siendo:

$$T_{12} = a - r_1 - r_2$$
$$T_{23} = a - r_2 - r_3$$
$$T_{34} = a - r_3 - r_4$$
$$T_{14} = a - r_1 - r_4$$

$$\begin{aligned} T_{13} =& \sqrt{O_1O_3^2 - (r_1 - r_3)^2} = \\ =& \sqrt{2(a - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{24} =& \sqrt{O_2O_4^2 - (r_2 - r_4)^2} = \\ =& \sqrt{2(a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de segundo grado, resulta una monstruosa ecuación de segundo grado:

$$\begin{gathered} (a - r_1 - r_2)(a - r_3 - r_4) + \\ +(a - r_1 - r_4)(a - r_2 - r_3) = \\ = \sqrt{2(a - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \cdot \\ \cdot \sqrt{2(a - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}. \end{gathered}$$

Resolviendo en a esta ecuación obtenemos

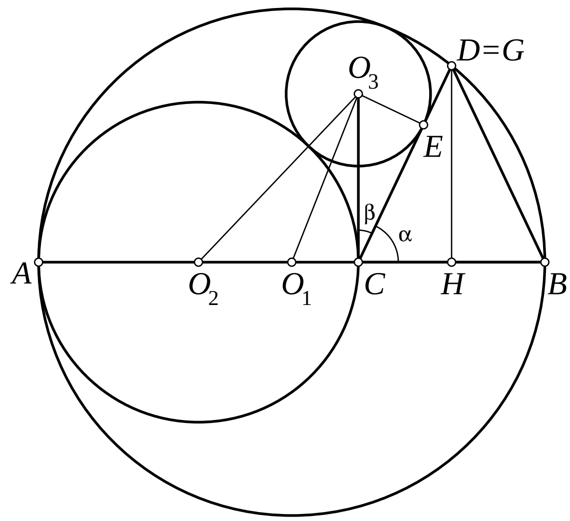
$$a = \frac{2(r_1r_3 - r_2r_4) + \sqrt{2P}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4},$$

siendo $P = (r_1 - r_2)(r_1 - r_4)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)$.

Problema 5.

Un círculo que contiene a dos círculos, un triángulo isósceles y una perpendicular

Consideramos la siguiente figura:



La construcción se ha hecho de la siguiente manera:

1. Trazamos circunferencia C_1 de centro O_1, radio r_1 y diámetro AB.
2. Construimos la circunferencia C_2 de centro O_2, radio r_2 y diámetro AC.
3. Trazamos la circunferencia C_3, tangente a C_1 y C_2 y estando su centro O_3 en la perpendicular por C a AB.
4. Desde C trazamos el segmento CD tangente a C_3.
5. Por el punto medio H del segmento CB trazamos la perpendicular GH, y así construimos el triángulo isósceles CGB.

El problema estará resuelto si vemos que los ángulos $\alpha = \angle BCD$ y $\beta = O_3CE$ son complementarios y, por tanto, que los segmentos CD y CG coinciden.

En primer, lugar, expresando la tangencia de las circunferencias C_1 y C_2 y la tangencia de las circunferencias C_1 y C_3, se cumplen las relaciones:

$$\begin{cases} d^2 + r_2^2 = (r_2 + r_3)^2 \\ d^2 + (2r_2 - r_1)^2 = (r_1 - r_3)^2 \end{cases},$$

de donde obtenemos

$$r_3 = \frac{2r_2(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2}, \quad d^2 = \frac{8r_1r_2^2(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Entonces,

$$\left(\frac{O_3E}{O_3C}\right)^2 = \frac{r_3^2}{d^2} = \frac{r_1 - r_2}{2r_1}.$$

Por otro lado,

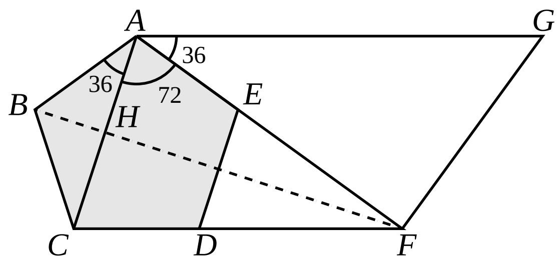
$$\begin{aligned}\left(\frac{CF}{CG}\right)^2 = \frac{CF^2}{CF^2 + FG^2} = \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2 + r_1^2 - r_2^2} = \\ = \frac{(r_1 - r_2)^2}{2r_1(r_1 - r_2)} = \frac{r_1 - r_2}{2r_1}.\end{aligned}$$

De la semejanza de los triángulos CO_3E y GCF deducimos que α y β deben ser complementarios.

Problema 6.

El pentágono y su abanico

Consideramos la siguiente figura:



Los triángulos ABH y AGF son semejantes.

Por otro lado, el triángulo ACF es semejante al triángulo formado por dos diagonales del pentágono regular que parten del mismo vértice, y por ello

$$\frac{AF}{AC} = \Phi.$$

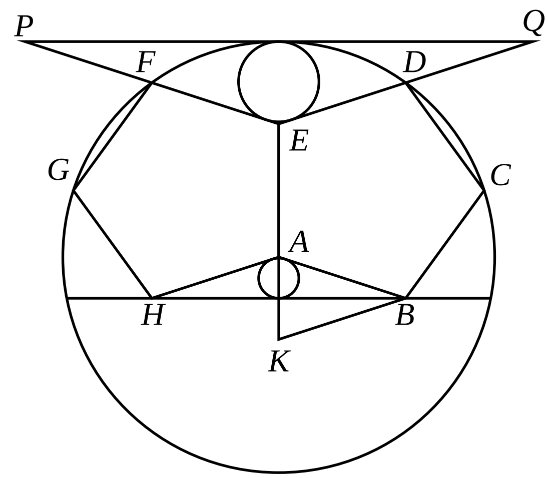
Entonces,

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AH} \Rightarrow AG = \frac{AF \cdot AB}{AH} = \frac{AF \cdot AB}{\frac{1}{2}AC} =$$
$$= 2\Phi \cdot k = (\sqrt{5} + 1)k.$$

Problema 7.

Los dos pentágonos

Efectivamente, consideremos el triángulo EPQ, semejante a ABH, en el que está inscrito el círculo de radio r.



Sean k el lado de los pentágonos y Φ el número de oro. Entonces $d = \Phi k$ es la diagonal de los pentágonos y los puntos C, D, F y G están en la circunferencia de centro A y radio d. La altura del triángulo EPQ es

$$d - k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}k - k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}k.$$

El triángulo ABK es isósceles, midiendo el ángulo desigual $36°$. Por tanto, $AB = \Phi \cdot AK$.

$$\tfrac{1}{2}AK = \frac{AB}{2\Phi} = \frac{k}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}k.$$

Como la altura de un triángulo es el doble que el de la otra, también lo serán los radios de las circunferencias inscritas en los mismos.

Problema 8.

Dos círculos y un cuadrado inscritos en un triángulo rectángulo

Usamos que en un triángulo rectángulo de catetos x e y, e hipotenusa z, es el radio ρ de la circunferencia inscrita al triángulo es

$$\rho = \frac{x+y-z}{2}.$$

Supongamos que el triángulo dado tiene base a y altura b. Usando triángulos semejantes, comparamos cada radio con la base del triángulo en el que está inscrito, y tenemos que

$$\frac{r}{s} = \frac{t}{a-t} = \frac{b}{a}.$$

Ahora usamos la fórmula anterior para expresar

$$\begin{aligned} s =& \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} t + t - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} t \right) = \\ =& \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{r} + 1 - \frac{\sqrt{r^2+s^2}}{r} \right) t. \end{aligned}$$

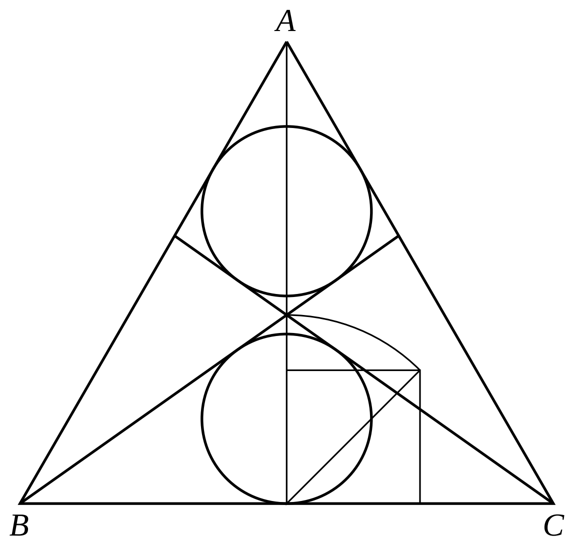
De aquí, $2rs = \left(r + s - \sqrt{r^2+s^2}\right) t$, y

$$\begin{aligned} t =& \frac{2rs}{r+s-\sqrt{r^2+s^2}} = \\ =& r + s + \sqrt{r^2+s^2}. \end{aligned}$$

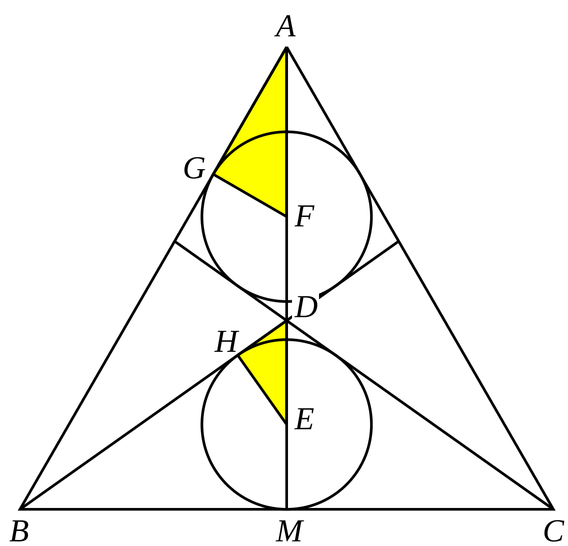
Problema 9.

Dos círculos gemelos en un triángulo equilátero

La figura siguiente muestra una forma sencilla de hacer la construcción: Con la cuarta parte del lado del triángulo, construimos un cuadrado. A una altura igual a la diagonal de este cuadrado es donde se cruzan las tangentes comunes a los dos círculos.



Para resolver el problema consideramos esta otra figura.



Llamamos r al radio de los círculos y h a la distancia MD.

El triángulo DEH es semejante a DBM. Por tanto,

$$\frac{DE}{HE} = \frac{DB}{MB} \Rightarrow \frac{h-r}{r} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{2a^2 r}{a^2 - 4r^2}.$$

Como AFG es semejante a ABM, tenemos $AF = 2 \cdot FG$, es decir,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a - (2h - r) = 2r \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a - 2r}{4}.$$

Igualando los dos valores de h y simplificando obtenemos que r es solución de la ecuación

$$8r^3 - 4\sqrt{3}ar^2 - 10a^2 r + \sqrt{3}a^3 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$r_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad r_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}a, \quad r_3 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}a.$$

Por tanto, la solución del problema es

$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}a.$$

Problema 10.

Tres círculos entre dos paralelas

Sean r_1, r_2, r_3 a los radios de las circunferencias C_1, C_2, C_3, respectivamente. Supongamos que la recta inferior es el eje de abscisas y situemos los centros de las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos $O_1 = (0, r_1)$, $O_2 = (2\sqrt{r_1 r_2}, r_2)$. De esta manera, C_1 y C_2 serán tangentes entre sí y a la recta inferior. Si $O_3 = (x, y)$ es el centro de una circunferencia con radio r_3 tangente a C_1 y C_2, (x, y) es uno de los puntos de intersección de las circunferencias

$$\begin{cases} x^2 + (y - r_1)^2 = (r_1 + r_3)^2 \\ \left(x - 2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2 + (y - r_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \end{cases}$$

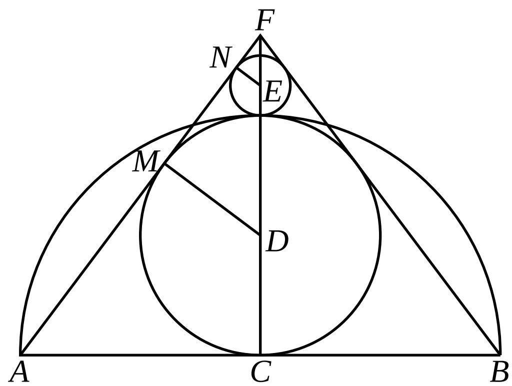
Hallando la solución positiva de y y añadiendo r_3 obtenemos

$$\begin{aligned} d &= y + r_3 = \\ &= \frac{2r_1 r_2 \left(r_1 + r_2 + 2r_3 + 2\sqrt{r_3(r_1 + r_2 + r_3)}\right)}{(r_1 + r_2)^2}. \end{aligned}$$

Problema 11.

Un semicírculo con un círculo dentro y otro fuera

Para resolver el problema, consideramos la siguiente figura. El radio de la circunferencia mayor es $\frac{r}{2}$. Llamemos s y h al radio de la circunferencia pequeña y a la altura CF, respectivamente.



Usando los triángulos semejantes DMF y ACF,

$$\frac{DF}{DM} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{h - \frac{r}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}.$$

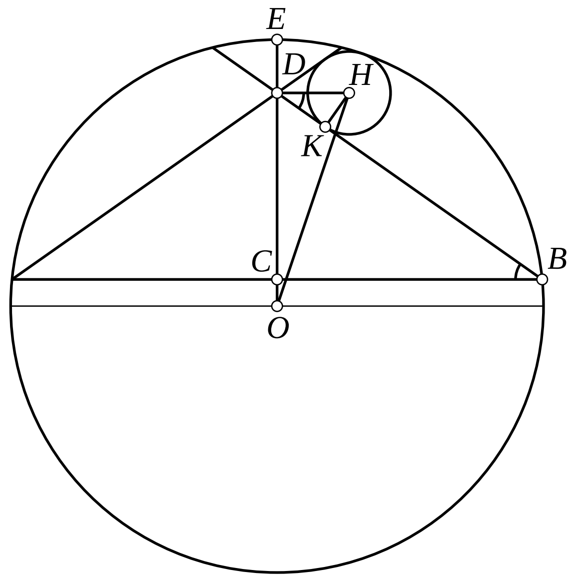
De aquí obtenemos $h = \frac{4r}{3}$ y $AF = \frac{5r}{3}$. Ahora, usamos los triángulos semejantes ENF y ACF, obteniendo:

$$\frac{EF}{EN} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{r}{3} - s}{s} = \frac{5}{3} \Rightarrow s = \frac{1}{8}r.$$

Problema 12.

Círculo inscrito entre dos cuerdas

Nombremos los puntos como en la siguiente figura:



Consideramos, sin pérdida de generalidad, que la circunferencia grande tiene radio unidad. Llamamos $a = DE$, $b = CD$, $DH = x$ y entonces tenemos $OC = 1 - a - b$ y $BC = \sqrt{1-(1-a-b)^2}$.

Usando la semejanza de los triángulos DHK y BDC,

$$\frac{DH}{HK} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{b^2+1-(1-a-b)^2}}{b}.$$

Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ODH,

$$x^2 + (1-a)^2 = (1-r)^2.$$

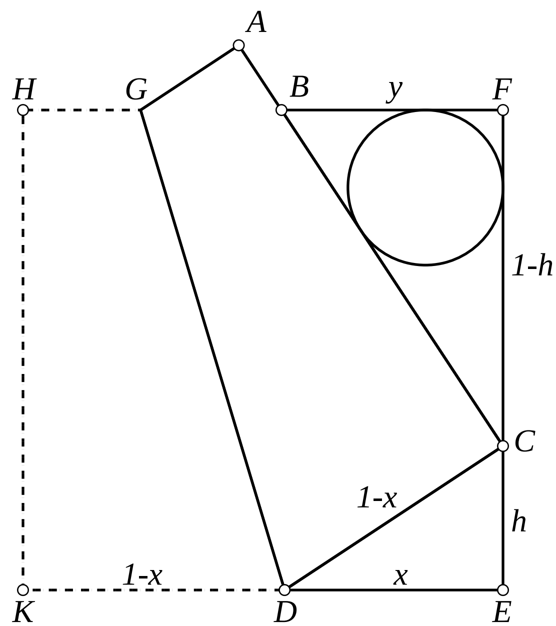
De estas dos ecuaciones podemos despejar

$$r = \frac{ab}{a+b},$$

que es equivalente a la relación propuesta.

Problema 13.

La moneda y la servilleta doblada.



Suponemos, sin pérdida de generalidad que el cuadrado tiene lado unidad y llamamos $x = DE$, $h = CE$, $y = BF$. Entonces, $KD = DC = 1 - x$. Aplicando el teorema de Pitágoras en DEC obtenemos $x = \frac{1}{2}(1 - h^2)$.

El triángulo BFC es semejante a CED. Por tanto,

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{1-h} \Rightarrow y = \frac{(1-x)h}{x} = \frac{2h}{1+h}.$$

La hipotenusa BC cumple

$$\begin{aligned} BC^2 &= (1-h)^2 + \frac{4h^2}{(1+h)^2} = \frac{(1-h^2)^2 + 4h^2}{(1+h)^2} = \\ &= \frac{(1+h^2)^2}{(1+h)^2} \Rightarrow BC = \frac{1+h^2}{1+h}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo con catetos x e y, e hipotenusa z es $\frac{1}{2}(x + y - z)$, al aplicarlo al triángulo BFC,

$$\begin{aligned} r =& \frac{CF + FB - BC}{2} = \frac{(1-h) + \frac{2h}{1+h} - \frac{1+h^2}{1+h}}{2} = \\ &= \frac{1 - h^2 + 2h - 1 - h^2}{2(1+h)} = \frac{h - h^2}{1+h}. \\ AB =& 1 - BC = 1 - \frac{1+h^2}{1+h} = \frac{h-h^2}{1+h}. \end{aligned}$$

Problema 14.

El ángel con la hogaza

Llamemos R y r a los radios de los círculos grande y pequeño.

El radio R cumple:

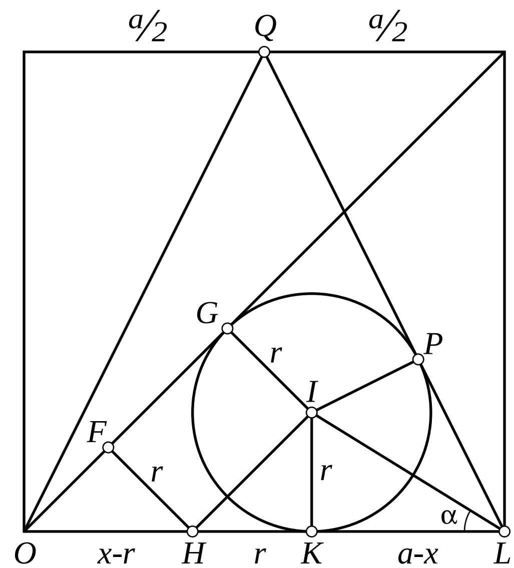
$$\left(R+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(a-R)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R^2+\frac{a^2}{4}+aR+\frac{a^2}{4}=a^2-2aR+R^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3aR=\frac{a^2}{2} \Rightarrow R=\frac{a}{6}.$$

El radio r cumple:

$$(a-r)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(a+R)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2-2ar+r^2+\frac{a^2}{4}=a^2+2ar+r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4ar=\frac{a^2}{4} \Rightarrow r=\frac{a}{16}.$$

Problema 15.

Un círculo entre dos triángulos isósceles



Por el centro I del círculo trazamos una paralela IH a la diagonal del cuadrado. La perpendicular HF a IH determina el triángulo rectángulo isósceles OFH. Entonces, llamando x a la distancia OK,

$$x - r = r\sqrt{2} \Rightarrow x = (1+\sqrt{2})r.$$

Llamando $\alpha = \angle KLI$ y $t = \tan\alpha$, resulta que

$$\begin{aligned} 2 = \tan OLQ = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - t^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

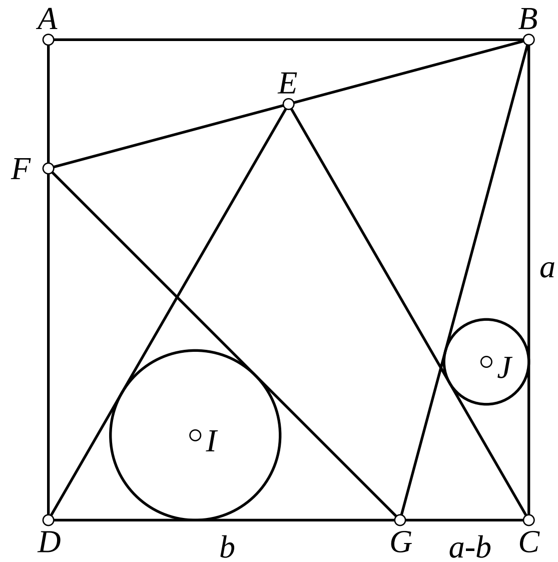
$$\frac{r}{a-x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{r}{a-(1+\sqrt{2})r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

De aquí, podemos obtener

$$r = \frac{2a}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$

Problema 16.

Dos círculos inscritos entre un cuadrado y dos triángulos equiláteros



Llamamos $b = DG = DG$. De Como $GF = GB$, tendremos

$$2b^2 = (a-b)^2 + a^2,$$

resultando $b = (\sqrt{3}-1)a$. Ahora usamos la geometría analítica para hallar los radios R y r de las dos circunferencias.

Supongamos que D es el origen de coordenadas y que DC y DA son los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente.

Las rectas FG y DE tienen ecuaciones:

$$DE : \sqrt{3}x - y = 0,$$
$$FG : x + y - (\sqrt{3}-1)a = 0.$$

Siendo $I = (u, R)$, las condiciones $d(I, FG) = d(I, DE) = R$ se escriben

$$\frac{\left|\sqrt{3}u - R\right|}{2} = R, \quad \frac{\left|u + R - \left(\sqrt{3}-1\right)a\right|}{\sqrt{2}} = R.$$

Resolviendo este sistema obtenemos el radio de la circunferencia mayor:

$$R = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)a}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Parece intuirse del dibujo que el radio de la circunferencia pequeña es la mitad del radio de la circunferencia mayor. ¿Será así?

Sean $J = (x, y)$ y r el centro y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo GCB. Las rectas CE y GB tienen ecuaciones:

$$\begin{aligned} &CE : \sqrt{3}x + y - a\sqrt{3} = 0, \\ &CB : x - \left(2 - \sqrt{3}\right) y - \left(\sqrt{3} - 1\right) a = 0. \end{aligned}$$

Las condiciones de tangencia se expresan:

$$\begin{cases} \dfrac{\left|\sqrt{3}x + y - a\sqrt{3}\right|}{2} = r, \\ \dfrac{\left|x - \left(2-\sqrt{3}\right) y - \left(\sqrt{3}-1\right) a\right|}{\sqrt{1 + (2-\sqrt{3})^2}} = r, \\ x = a - r. \end{cases}$$

Resolviendo, obtenemos

$$r = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right) a}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}.$$

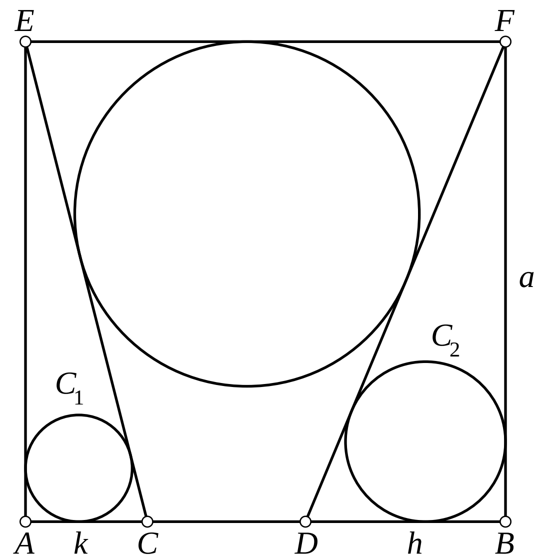
Puede comprobarse, por multiplicación, que

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{6}},$$

es decir, efectivamente R es el doble de r como habíamos supuesto.

Problema 17.

Un círculo entre dos tangentes a círculos inscritos en triángulos rectángulos dentro de un cuadrado.



Si k es la longitud del segmento AC, teniendo en cuenta la fórmula del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo,

$$\frac{a+k-\sqrt{a^2+k^2}}{2}=r_1 \Rightarrow k=\frac{2r_1(a-r_1)}{a-2r_1}.$$

Análogamente, si h es la longitud del segmento DB, resulta

$$h=\frac{2r_2(a-r_2)}{a-2r_2}.$$

Usando la forma punto-pendiente, las ecuaciones de las rectas EB y CF son

$$\begin{aligned} y &= a-mx, \\ y &= a+n(x-a), \end{aligned}$$

siendo

$$m=\frac{a(a-2r_1)}{2r_1(a-r_1)}, \quad n=\frac{a(a-2r_2)}{2r_2(a-r_2)}.$$

Ahora usamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta para expresar el hecho de que la circunferencia central sea tangente a las dos rectas. Si $G=(x,y)$ es el centro y r es el radio de esta circunferencia, se cumplirán las relaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{|mx+y-a|}{\sqrt{m^2+1}} = r, \\ \dfrac{|nx-y+a-na|}{\sqrt{n^2+1}} = r, \\ y = a-r. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |mx-r| = r\sqrt{m^2+1}, \\ |nx+r-na| = r\sqrt{n^2+1}. \end{cases} \tag{3}$$

Como

$$\begin{aligned} 1+m^2 =& 1 + \frac{a^2(a^2-4r_1a+4r_1^2)}{4r_1^2(a^2-2ar_1+r_1^2)} = 1 + \frac{a^4-4r_1a^3+4r_1^2a^2}{4r_1^2a^2-8r_1^3a+4r_1^4} = \\ =& \frac{a^4-4r_1a^3+8r_1^2a^2-8r_1^3a+4r_1^4}{4r_1^2(a-r_1)^2} = \frac{(a^2-2r_1a+2r_1^2)^2}{4r_1^2(a-r_1)^2}, \end{aligned}$$

resulta que

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{a^2-2r_1a+2r_1^2}{2r_1(a-r_1)}.$$

Haciendo unos cálculos parecidos para n, las relaciones (1) pueden expresarse:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a(a-2r_1)x}{2r_1(a-r_1)} - r \right| &= \frac{a^2-2r_1a+2r_1^2}{2r_1(a-r_1)} r \\ \left| \frac{a(a-2r_2)(a-x)}{2r_2(a-r_2)} - r \right| &= \frac{a^2-2r_2a+2r_2^2}{2r_2(a-r_2)} r \end{aligned}$$

Eliminando denominadores,

$$\begin{aligned} |a(a-2r_1)x - 2r_1(a-r_1)r| &= \left(a^2-2r_1a+2r_1^2\right) r \\ |a(a-2r_2)(a-x) - 2r_2(a-r_2)r| &= \left(a^2-2r_2a+2r_2^2\right) r \end{aligned}$$

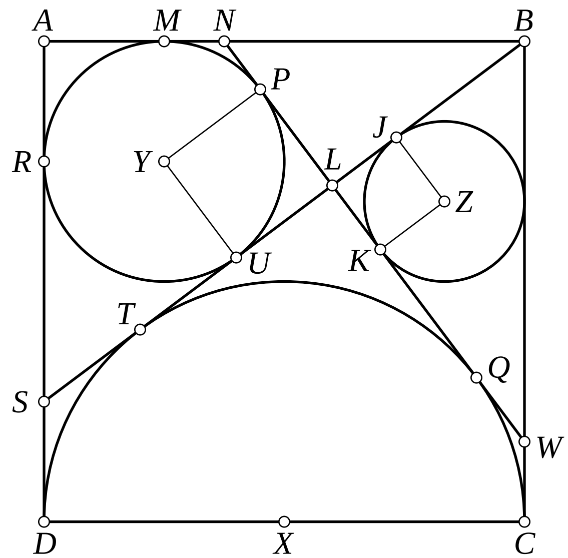
Eliminando el valor absoluto:

$$\begin{aligned} &(a^2-2r_1a)x + (2r_1^2-2r_1a)r = \pm\left(a^2-2r_1a+2r_1^2\right) r \\ &-(a^2-2r_2a)x + (a^3-2r_2a^2) - (2r_2^2-2r_2a)r = \pm\left(a^2-2r_2a+2r_2^2\right) r \end{aligned}$$

Esto da lugar a cuatro sistemas de ecuaciones.

Problema 18.

Un cuadrado, un semicírculo y dos círculos



Llamamos r_1 y r_2 a los radios de las circunferencias con centros Y y Z, respectivamente. Usamos que los segmentos de tangente a una circunferencia desde un punto miden lo mismo. Entonces,

$$TU = BT - BU = BC - BM = a - (a - r_1) = r_1.$$

Al ser TU la tangente interior común a las circunferencias (X) e (Y),

$$\begin{aligned} r_1^2 =& TU^2 = XY^2 - (\tfrac{a}{2} + r_1)^2 = \\ &= \left[(\tfrac{a}{2} - r_1)^2 + (a - r_1)^2\right] - (\tfrac{a}{2} + r_1)^2. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $r_1 = \frac{a}{4}$.

Ahora, usamos que $LS = DR$ para deducir que $LS = DR = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$. Como también es $LU = ST$ y sabemos que $TU = \frac{a}{4}$, deducimos que también $LP = LU = \frac{a}{4}$. es decir, $UYPL$ es un cuadrado (tiene los cuatro lados iguales y dos de los ángulos opuestos son rectos).

Ahora, como PYN como es semejante a USY y $US = 2 \cdot UY$, tendremos que $PN = \frac{1}{2}PY = \frac{a}{8}$. Así, $LN = \frac{a}{4} + \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$.

Esto nos permite calcular

$$BN = BA - NA = BA - LN = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}.$$

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo BLN, obtenemos:

$$BL^2 = BN^2 - LN^2 = \frac{25}{64}a^2 - \frac{9}{64}a^2 =$$
$$= \frac{16}{64}a^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow BL = \frac{a}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $WC = JL = r_2$, resulta $BW = a - r_2$. Para hallar una expresión de LW, tenemos en cuenta que en un triángulo rectángulo con catetos x, y e hipotenusa z el radio de la circunferencia inscrita viene dado por

$$r = \frac{x + y - z}{2},$$

Aplicando esto al triángulo BWL,

$$r_2 = \frac{BL + LW - BW}{2} = \frac{\frac{a}{2} + LW - a + r_2}{2}.$$

De aquí deducimos que $LW = r_2 + \frac{a}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BLW, resulta

$$(a - r_2)^2 = \frac{a^2}{4} + \left(r_2 + \frac{a}{2}\right)^2,$$

ecuación que una vez resuelta conduce a $r_2 = \frac{a}{6}$.

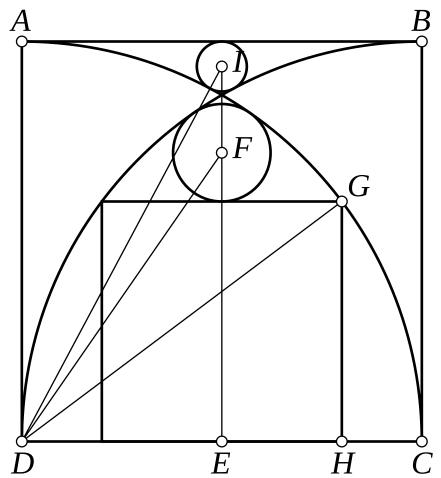
Relacionando r_1 y r_2 obtenemos que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{6}} = \frac{3}{2}.$$

Problema 19.

Círculos entre arcos y cuadrados

Nombramos puntos como en la siguiente figura:



Llamando x al lado del cuadrado interior y usando el teorema de Pitágoras con el triángulo DHG,

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{x}{2}\right)^2+x^2=a^2 \Rightarrow (x+a)^2+4x^2=4a^2.$$

Resolviendo, obtenemos

$$x=\frac{3a}{5}.$$

Ahora, llamando R al radio del círculo interior mayor, y usando el teorema de Pitágoras con el triángulo DEF,

$$\left(\frac{3a}{5}+R\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(a-R)^2 \Rightarrow r=\frac{39}{320}a.$$

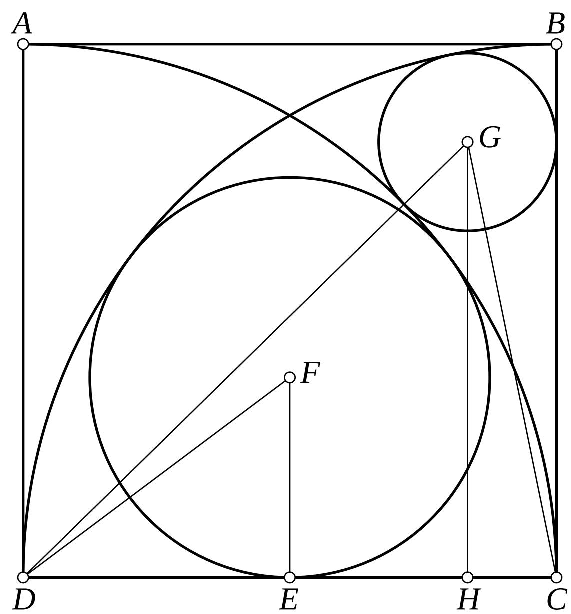
Por último, siendo r el radio del menor de los círculos interiores, usando una vez más el teorema de Pitágoras, ahora con el triángulo DEI,

$$(a-r)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(a+r)^2 \Rightarrow r=\frac{a}{16}.$$

Problema 20.

Dos círculos y dos arcos dentro de un cuadrado

Consideramos la siguiente figura:



Llamamos $R = FE$ al radio del mayor de los círculos interiores. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo DEF, resulta

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2 = (a - R)^2 \Rightarrow R = \frac{3a}{8}.$$

Ahora llamamos r al radio del círculo menor, e y a la altura GH. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos DHG y CHG resulta el sistema:

$$\begin{cases} (a - r)^2 + y^2 = (a + r)^2 \\ r^2 + y^2 = (a - r)^2 \end{cases}$$

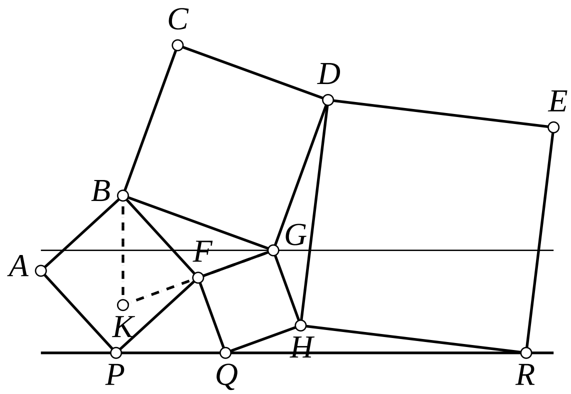
Al resolver el sistema obtenemos:

$$r = \frac{a}{6}.$$

Problema 21.

Cóctel de cuadrados

Consideramos la siguiente figura:



Vamos a demostrar que la condición $a = 2x$ es suficiente para afirmar que los puntos están alineados.

Si hacemos, con centro F, un giro de $90°$ en el sentido de las agujas del reloj, el triángulo FPQ se transforma en el triángulo FBK, siendo por tanto BK perpendicular a PQ. Si suponemos que $BG = 2 \cdot FG$, entonces el triángulo BGK es isósceles, siendo la bisectriz del ángulo G perpendicular al lado opuesto BK. Deducimos entonces que la bisectriz del ángulo G del triángulo BGK es paralela al segmento PQ.

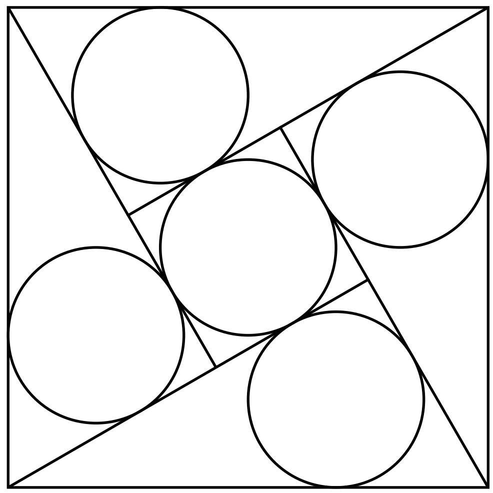
De una forma simétrica, el segmento QR será paralelo a la bisectriz del ángulo G del triángulo DGH. Como las dos bisectrices son la misma, entonces los puntos P, Q y R son alineados.

En el caso general, los ángulos $\angle BGF$ y $\angle DGH$ son suplementarios. Llamando α al ángulo $\angle BGF$ tendremos, por el teorema del coseno:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + x^2 + 2ax\cos a \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2(a^2 + x^2).$$

Problema 22.

Cinco círculos gemelos en un cuadrado



Sean a, b y c los lados de los triángulos rectángulos ordenados de menor a mayor. La figura muestra que el cuadrado central tiene por lado $b-a$. Entonces, usando la fórmula del radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo podemos expresar:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

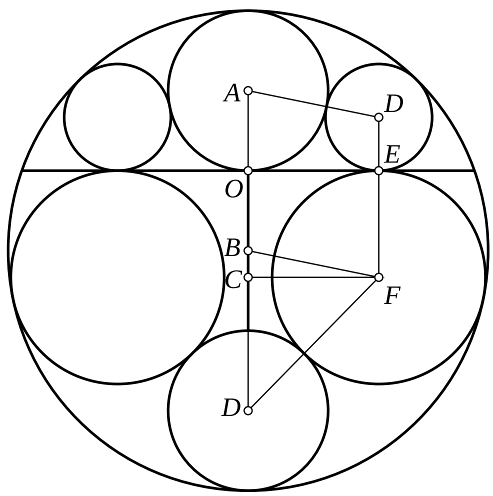
Entonces $c = 2a$, $b = \sqrt{3}a$ y

$$r = \frac{\sqrt{3}a - a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}c.$$

Problema 23.

Cuatro círculos grandes y dos pequeños

Nos referimos a la siguiente figura:



Con la notación del enunciado vemos que $OA = r$, $DE = s$, $EF = R$, $OB = a - 2r$, $BC = R + 2r - a$. Llamando $x = OE$, como $x = 2\sqrt{rs}$, resulta que $x^2 = 4rs$.

Por ser tangentes las circunferencias de centros B y D,

$$(a - 2r + s) + x^2 = (a - s)^2,$$

de donde, teniendo en cuenta la relación anterior deducimos que

$$s = \frac{r(a-r)}{a}, \quad x = 2r\sqrt{\frac{a-r}{a}}.$$

Ahora expresamos que el círculo de centro F es tangente también al círculo de centro B:

$$(R + 2r - a)^2 + x^2 = (a - R)^2.$$

De aquí deducimos que

$$R = a - 2r + \frac{r^2}{a}.$$

Llegados a este punto, queremos además que el círculo de centro F y radio R sea tangente al círculo de centro D, que a su vez queremos que tenga radio r. Es fácil imaginar que, para ello, r tendrá que tener un valor especial.

Imponiendo en $CD^2+DF^2 = DF^2$ con las condiciones anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&(2a - 2r - R - r)^2 + x^2 = (R + r)^2\\
&4(a - r)^2 - 4(R + r)(a - r) + 4r^2 - \frac{4r^3}{a} = 0\\
&\quad a(R + r)(a - r) = a(a - r)^2 + r^2 a - r^3 =\\
&\qquad\qquad\qquad = (a - r)(a^2 - ar + r^2)\\
&R = -r + \frac{a^2 - ar + r^2}{a} = a - 2r + \frac{r^2}{a}
\end{aligned}$$

Es decir, hemos llegado a una identidad, pues este valor de R es el que hemos obtenido antes. Esto significa que el círculo de centro F y radio R será tangente al círculo de centro D y r para cualquier valor de r.

Resolviendo la ecuación

$$a - 2r + \frac{r^2}{a} = r$$

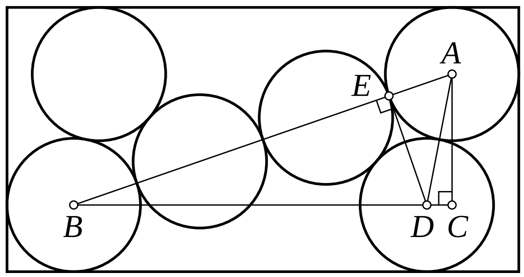
obtenemos que los cuatro círculos oscuros serán iguales cuando

$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a.$$

Problema 24.

Seis círculos en un rectángulo

Nombremos en la figura los puntos como sigue:



Llamando x e y a la base y la altura del rectángulo podemos expresar $BC = x - 1$, $AC = y - 1$, $AB = 3$, $DE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AD = 1$ y $BE = \frac{5}{2}$.

Obtenemos que $BD = \sqrt{7}$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BED. Entonces, expresamos $CD = x - 1 - \sqrt{7}$.

Aplicando ahora el teorema a los triángulos ACB y ACD, obtenemos

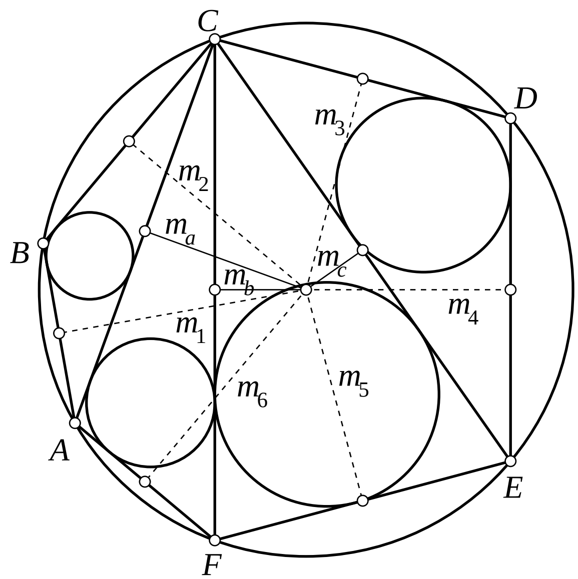
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ \left(x - 1 - \sqrt{7}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}.$$

Resolviendo, $x = 1 + \dfrac{15}{2\sqrt{7}}, \quad y = 1 + \sqrt{\dfrac{27}{28}}$.

Problema 25.

Primer teorema de Mikami y Kobayashi

Consideramos, por ejemplo, esta triangulación de un hexágono inscrito en una circunferencia.



Sean $m_1, \ldots, m_6$ las distancias del circuncentro a los lados del hexágono. Sean r_1, r_2, r_3 y r_4 los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, ACF, CEF y CDE. Aplicando el teorema de Carnot a estos triángulos obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 - m_a &= R + r_1, \\ m_6 + m_a - m_b &= R + r_2, \\ m_b + m_c - m_5 &= R + r_3, \\ m_3 + m_4 - m_c &= R + r_4. \end{aligned}$$

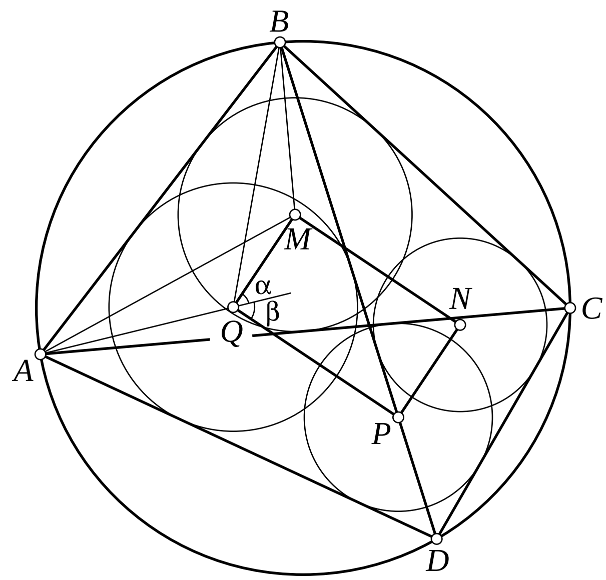
Sumando miembro a miembro, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{4} r_i = \sum_{k=1}^{6} m_k - 4R,$$

expresión que no depende de la triangulación que hemos usado.

Problema 26.

Segundo teorema de Mikami y Kobayashi



Unimos AM, AQ, BM y BQ. La recta AQ divide al ángulo MQP en dos ángulos α y β.

Por ser M el incentro de ABC se cumple que $\angle AMB = 90° + \frac{\angle ACB}{2}$.

De forma similar, por ser Q el incentro de ABD se cumple que $\angle AQB = 90° + \frac{\angle ADB}{2}$.

Por ser $\angle ACB$ y $\angle ADB$ ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales, y por tanto, los ángulos $\angle AMB$ y $\angle AQB$ también son iguales y el cuadrilátero $AQMB$ está inscrito en una circunferencia, siendo entonces $\alpha = \frac{B}{2}$.

Razonando de forma parecida, también el cuadrilátero $AQPD$ está inscrito en una circunferencia y $\beta = \frac{D}{2}$.

Entonces,

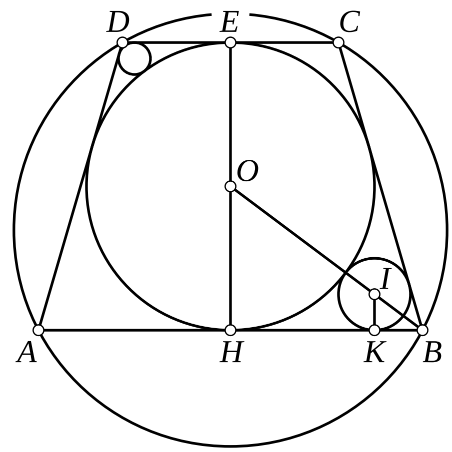
$$\angle MQP = \alpha + \beta = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} = 90°.$$

De forma similar se comprobaría que los ángulos restantes del cuadrilátero $MNPQ$ son rectos, por lo que $MNPQ$ es un rectángulo.

Problema 27.

Un cuadrilátero inscrito y circunscrito, y dos círculos más

Nos referimos a la siguiente figura:



Llamamos $a = HB$, $b = EC$. $R = OH = OE$ es el radio que queremos hallar. Llamamos r y s a los radios conocidos de las circunferencias pequeñas. En nuestro caso tenemos $r = \frac{9}{2}$ y $s = 2$.

La longitud de HK, tangente exterior común a las circunferencias de centros O e I es $2\sqrt{Rr}$. Usando los triángulos semejantes OHB e IKB, podemos expresar

$$\frac{IK}{KB} = \frac{OH}{HB} \Rightarrow \frac{r}{a - 2\sqrt{Rr}} = \frac{R}{a} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}.$$

Procediendo de la misma forma con la otra circunferencia pequeña, podemos expresar b en términos de R y s:

$$b = \frac{2R\sqrt{Rs}}{R-s}.$$

Al ser $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, coincide la suma de sus lados opuestos:

$$\begin{aligned} AB + DC &= AD + CG \\ 2a + 2b &= 2\sqrt{4R^2 + (a-b)^2} \\ (a+b)^2 &= 4R^2 + (a-b)^2 \\ ab &= R^2. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores obtenidos de a y b:

$$\begin{aligned}
&\frac{4R^2\sqrt{Rr}\sqrt{Rs}}{(R-r)(R-s)} = R^2 \\
&4\sqrt{rs}R = R^2 - (r+s)R + rs \\
&R^2 - (r+s+\sqrt{rs})R + rs = 0.
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $r = \frac{9}{2}$, $s = 2$ resulta que R es una solución de la ecuación $R^2 - \frac{37}{2}R + 9 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $R = 18$ y $R = \frac{1}{2}$. Por tanto, el radio buscado es $R = 18$.

5. Las Pistas

1. Usa el teorema de Descartes.

2. Todos los triángulos rectángulos que ves en la figura son semejantes.

3. Usa la fórmula la longitud del segmento de tangente común a dos circunferencias tangentes.

4. Usa el teorema de Casey. También te hará falta la fórmula de la longitud del segmento de tangente común a dos circunferencias exteriores.

5. En este problema pueden ser útiles el teorema de Pitágoras, expresar la tangencia de las circunferencias y la semejanza de triángulos. Una forma de enfocar el problema puede ser: *comenzar a construir la figura por la izquierda y por la derecha, comprobando que coinciden al encontrarse.*

6. Usar triángulos semejantes y el número de oro.

6. Bibliografía y referencias

6.1. Páginas web

http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk
Página web de Mark Daabs. Una vez allí, seleccionar Maths, Geometry, Sketchpad files y veremos muchos de los problemas aquí resueltos en archivos del programa Geometer's Sketchpad.

http://www.paginar.net/matias/articles/sangaku/sangaku.html
Página web de Matias Giovanni. Contiene varios ejemplos de problemas sangaku.

http://mathworld.wolfram.com
Enciclopedia de Matemáticas de Eric Weisstein en la que no vienen muchas demostraciones pero nos permite encontrar completas referencias donde buscar la información que necesitamos.

http://www.arrakis.es/~mcj/sangaku.htm
Páginas de la Gacetilla matemática, donde pueden encontrarse las demostraciones dadas aquí de los teoremas de Mikami y Kobayashi

http://www.maths.liv.ac.uk/~mathsclub/Topics/Japanese/
Página de John Rigby con problemas sangaku y sus soluciones.

6.2. Libros

Introduction to Geometry. H. S. M. Coxeter. Wiley. Nueva York.

Japanese Temple Geometry Problems,. H. Fukagawa y D. Pedoe. Winnipeg, Canada, 1989.